This equation shows, combined with (A 12), valid for $|\boldsymbol{R}| \neq 0$, that $G(\boldsymbol{R})$ satisfies (4) (MORSE–FESHBACH [11], p. 809).

The function $G(\boldsymbol{R})$ satisfies the boundary conditions on the side planes (35 a, b) as it can be seen directly from (40).

The boundary conditions (36 a, b) are also satisfied. This can be proved as follows. For example, for (36 a) we consider at first the integral

$$I_s = 2 \int G_s(\boldsymbol{r}_t, 0 \,|\, \boldsymbol{r}_t', 0)\; G_{sz}(\boldsymbol{r}_t', z_i \,|\, \boldsymbol{r}_{t1}, z_1)\; \mathrm{d}s', \tag{A 15}$$

where $G_{sz} = \partial G_s / \partial z$. If $\mathfrak{Re}(s) > 2$ we obtain from the expression (39), using the known properties of HANKEL functions,

$$I_s = -\frac{1}{i\,A}\, 2^{\frac{1}{2}s-2} \exp\left\{ i\,\frac{s\,\pi}{2} \right\} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \sum_m \frac{|z_i - z_1|^{\frac{1}{2}s}}{\Gamma_m^{\frac{3}{2}s-1}}\, H^{(1)}_{-\frac{1}{2}s+1}\,(\Gamma_m\,|z_i - z_1|)\, \exp\{i\,\boldsymbol{K}_{mt}\cdot(\boldsymbol{r}_t - \boldsymbol{r}_{t1})\}\,. \tag{A 16}$$

Since it is assumed that $z_i \neq z_1$ this expression is an analytic function of s except at the poles of $\Gamma(\frac{1}{2}\,s)$. Hence putting $s = 1$ we have

$$I_1 = 2 \int G(\boldsymbol{r}_t, 0 \,|\, \boldsymbol{r}_t', 0)\; G_z(\boldsymbol{r}_t', z_i \,|\, \boldsymbol{r}_{t1}, z_1)\; \mathrm{d}s' = -G(\boldsymbol{r}_t, z_i \,|\, \boldsymbol{r}_{t1}, z_1)\,. \tag{A 17}$$

This proves (36 a). (36 b) can be proved in the same way.

Gravitationsinstabilitäten eines Plasmas bei differentieller Rotation

R. EBERT

Institut für Theoretische Physik der Universität Frankfurt a. M.

(Z. Naturforschg. **22 a**, 431—437 [1967]; eingegangen am 14. Oktober 1966)

Herrn Prof. Dr. L. BIERMANN *zum 60. Geburtstag gewidmet*

In this paper an instability calculation is given for an axially symmetric gas distribution which has a differential rotation and in which a magnetic field is present. It is a generalization of similar calculations given by CHANDRASEKHAR and BEL and SCHATZMAN. The generalization becomes necessary for the study of problems of the formation of planetary systems and star formation.

The instability conditions and the critical wave lengths are calculated for plane-wave-like disturbances. For disturbances running perpendicularly to the axis of rotation instability can occur only if the gas density exceeds a critical value which depends on the differential rotation at the considered distance only as long as pressure gradients and gradients of the magnetic field strength are negligible. If the gas density exceeds this critical value the shortest unstable wave length is proportional to the square root of $v_T^2 + v_B^2$, where v_T means the velocity of sound and v_B the ALFVÉN-velocity.

For disturbances running parallel to the axis of rotation in addition to the JEANS instability a new type of instability occurs due to the simultaneous action of the magnetic field and the differential rotation; for rigid rotation this instability vanishes.

In vielen astrophysikalischen Untersuchungen spielt die Frage nach den Gravitationsinstabilitäten eines unter seiner Eigengravitation stehenden Gases eine wichtige Rolle. JEANS [1] führte als erster Instabilitätsrechnungen dieser Art aus. Erweiterungen auf kompliziertere Gaskonfigurationen ohne und mit Magnetfeld sind in unserer Zeit u. a. von CHANDRASEKHAR und FERMI [2], FRICKE [3], CHANDRASEKHAR [4], BEL und SCHATZMAN [5], SAFRONOV [6] und GLIDDON [7] ausgeführt worden. Die hier durchgeführte ist eine Verallgemeinerung der von CHANDRASEKHAR [4] und BEL und SCHATZMAN [5]. Sie geht aus neueren Untersuchungen zur Entstehung von Sternen und Planetensystemen hervor [8].

[1] J. H. JEANS, Phil. Trans. Roy. Soc. London **199**, 1 [1902].
[2] S. CHANDRASEKHAR u. E. FERMI, Astrophys. J. **118**, 116 [1953].
[3] W. FRICKE, Astrophys. J. **120**, 356 [1954].
[4] S. CHANDRASEKHAR, Vistas in Astronomy, Pergamon Press, London 1955, p. 344.
[5] N. BEL u. E. SCHATZMAN, Rev. Mod. Phys. **30**, 1015 [1958].
[6] V. SAFRONOV, Ann. Astrophys. **23**, 979 [1960].
[7] J. E. C. GLIDDON, Astrophys. J. **145**, 583 [1966].
[8] R. EBERT, Zur Theorie der Entstehung von Planetensystemen, Habilitationsschrift, Universität Frankfurt a. M. 1964; Magnetohydrodynamical Model of the Formation of Planetary Systems, Astrophys. J., in Vorbereitung.

Als ungestörte Gaskonfiguration wird ein unter seiner Eigengravitation stehendes Plasma gewählt, das Axialsymmetrie hat, von einem Magnetfeld durchsetzt wird und sich in differentieller Rotation befindet. In dem gleichzeitigen Zulassen von Magnetfeld und differentieller Rotation liegt die Erweiterung zu früheren Rechnungen. Der differentiellen Rotation wird keine Einschränkung auferlegt; das ungestörte Magnetfeld dagegen soll parallel zur Rotationsachse ausgerichtet sein.

Da bei vielen astrophysikalischen Prozessen die Gasdichten extrem niedrig sind, hat das Plasma meist sehr hohe elektrische Leitfähigkeit. Es wird daher die vereinfachende Annahme unendlicher Leitfähigkeit gemacht. Der Zustand des ungestörten Plasmas und Magnetfeldes soll ferner in Richtung der Rotationsachse translationsinvariant sein, es wird also streng genommen unendliche Schichtdicke vorausgesetzt. Trotzdem sind die hier gewonnenen Ergebnisse auch für Plasmaverteilungen mit endlichen Schichtdicken von Bedeutung. Bei ähnlichen Instabilitätsrechnungen von FRICKE [3] und SAFRONOV [6] nämlich hat sich gezeigt, daß die Abweichungen in den sich ergebenden kritischen Dichten für den Fall endlicher Dicke der rotierenden Gasscheibe verglichen mit dem Fall unendlicher Dicke nur relativ gering sind (maximal um den Faktor 1,5), sofern die Störungswellenlänge nicht groß gegenüber der Schichtdicke wird. Und diese Bedingung ist in vielen Fällen erfüllt.

1. Differentialgleichungssystem für die Störungsgrößen

Die Annahme unendlicher Leitfähigkeit bedeutet das Bestehen der Gleichung [9]

$$c\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{1}$$

wo $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{B}$ elektrische und magnetische Feldstärke, $\boldsymbol{v}$ die makroskopische Geschwindigkeit des Plasmas und c die Lichtgeschwindigkeit bedeuten. Wegen der geringen Dichte im interstellaren Gas gilt ferner mit sehr guter Näherung $\mu_B = 1$, wenn μ_B die magnetische Permeabilität ist. Die Gleichungen der Magnetohydrodynamik [9] zusammen mit den Gleichungen der Gravitation vereinfachen sich dadurch zu

$$\varrho\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \operatorname{grad}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \Phi\right) - \boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{v}\right\} + \operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{2}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = 0\,, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0\,, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}(\varrho\, \boldsymbol{v}) = 0\,, \tag{4}$$

$$\Delta \Phi - 4\pi G \varrho = 0\,, \tag{5}$$

$$p = \frac{R\,T\,\varrho}{\mu}\,, \tag{6}$$

wo ϱ, p und T die Dichte, den Druck und die Temperatur des Gases, Φ das Gravitationspotential, G und R Gravitations- und allgemeine Gaskonstante, μ das Molekulargewicht des Gases und t die Zeit bedeuten.

Es wird nun der Störungsansatz

$$u = \bar{u} + \delta u\,, \qquad \partial \bar{u}/\partial t = 0 \tag{7}$$

gemacht, wo u symbolisch für jede der Größen ϱ, p, Φ, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}$ steht, die überstrichenen Werte die ungestörte Größe bezeichnen und die Störungsgrößen δu als klein gegen die $\bar{u}$ vorausgesetzt werden. Der ungestörte Zustand soll ferner ein stationärer oder statischer Zustand sein. Zwischen der Druck- und Dichtestörung soll die Beziehung gelten

$$\delta p = v_T^2\, \delta \varrho\,, \tag{8}$$

wo v_T die allein von der Temperatur abhängige Schallgeschwindigkeit des Gases bedeutet.

Als Differentialgleichungssystem für die Störungen ergibt sich, wenn grad $\bar{\Phi}$ noch mit Hilfe der anderen ungestörten Größen eliminiert wird,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\delta \boldsymbol{v}) &+ \operatorname{grad}(\bar{\boldsymbol{v}} \cdot \delta \boldsymbol{v} + \delta \Phi) - \bar{\boldsymbol{v}} \times \operatorname{rot} \delta \boldsymbol{v} - (\delta \boldsymbol{v}) \times \operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{v}} \\ &+ \frac{1}{\bar{\varrho}}\left\{\operatorname{grad}(v_T^2\, \delta \varrho) + \frac{1}{4\pi}\bar{\boldsymbol{B}} \times \operatorname{rot} \delta \boldsymbol{B} + \frac{1}{4\pi}(\delta \boldsymbol{B}) \times \operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{B}}\right\} \\ &- \frac{\delta \varrho}{(\bar{\varrho})^2}\left(\operatorname{grad} \bar{p} + \frac{1}{4\pi}\bar{\boldsymbol{B}} \times \operatorname{rot} \bar{\boldsymbol{B}}\right) = 0\,, \end{aligned} \tag{9}$$

[9] Siehe z. B. L. SPITZER, Physics of Fully Ionized Gases, Interscience Publishers Inc., New York 1956. — T. G. COWLING, Magnetohydrodynamics, Interscience Publishers Inc., New York 1957.

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta \boldsymbol{B}) - \operatorname{rot}[\bar{\boldsymbol{v}} \times \delta \boldsymbol{B} + (\delta \boldsymbol{v}) \times \bar{\boldsymbol{B}}] = 0\,, \quad \operatorname{div}(\delta \boldsymbol{B}) = 0\,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\delta \varrho) + \operatorname{div}(\bar{\varrho}\, \delta \boldsymbol{v} + \bar{\boldsymbol{v}}\, \delta \varrho) = 0\,, \qquad \Delta(\delta \Phi) - 4\pi G\, \delta \varrho = 0\,. \tag{11), (12}$$

Um die zu Anfang erwähnte Annahme über die Axialsymmetrie des *ungestörten* Zustandes auszunutzen, werden Zylinderkoordinaten s, φ, z eingeführt. Die angenommene Translationsinvarianz in z-Richtung (unendliche Schichtdicke) erzwingt ferner z-Unabhängigkeit der ungestörten Größen. Daher ist

$$\bar{\boldsymbol{v}} = (0, \bar{v}(s), 0)\,, \qquad \bar{\boldsymbol{B}} = (0, 0, \bar{B}(s))\,, \tag{13}$$

wo die Größen in der Klammer jeweils die s-, φ- und z-Komponente und s der Abstand von der Achse bedeuten. Werden für die Störungen noch die Bezeichnungen

$$\delta \boldsymbol{v} = (v_s, v_\varphi, v_z)\,, \qquad \delta \boldsymbol{B} = (b_s, b_\varphi, b_z)\,, \qquad \delta \Phi = \varepsilon\,, \qquad \delta \varrho = \eta \tag{14}$$

eingeführt und wird $\bar{v}(s)$ mit Hilfe der Winkelgeschwindigkeit $\bar{\Omega}(s) = s^{-1}\bar{v}(s)$ ausgedrückt, so ergibt sich das folgende Differentialgleichungssystem:

$$\dot{v}_s + \bar{\Omega}\, v_{s|\varphi} - 2\bar{\Omega}\, v_\varphi - \frac{1}{4\pi\bar{\varrho}}(\bar{B}\, b_{s|z} - \bar{B}\, b_{z|s} - \bar{B}_{|s}\, b_z) + \frac{v_T^2}{\bar{\varrho}}\eta_{|s} - \frac{1}{\bar{\varrho}^2}\left(\bar{p} + \frac{(\bar{B})^2}{8\pi}\right)_{|s}\eta + \varepsilon_{|s} = 0\,, \tag{15}$$

$$\dot{v}_\varphi + \bar{\Omega}\, v_{\varphi|\varphi} + (2\bar{\Omega} + s\,\bar{\Omega}_{|s})\, v_s - \frac{\bar{B}}{4\pi\bar{\varrho}}\left(b_{\varphi|z} - \frac{1}{s}\, b_{z|\varphi}\right) + \frac{v_T^2}{s\,\bar{\varrho}}\eta_{|\varphi} + \frac{1}{s}\,\varepsilon_{|\varphi} = 0\,, \tag{16}$$

$$\dot{v}_z + \bar{\Omega}\, v_{z|\varphi} - \frac{\bar{B}_{|s}}{4\pi\bar{\varrho}}\, b_s + \frac{v_T^2}{\bar{\varrho}}\eta_{|z} + \varepsilon_{|z} = 0\,, \tag{17}$$

$$\dot{b}_s + \bar{\Omega}\, b_{s|\varphi} - \bar{B}\, v_{s|z} = 0\,, \tag{18}$$

$$\dot{b}_\varphi - \bar{B}\, v_{\varphi|z} - (\bar{\Omega} + s\,\bar{\Omega}_{|s})\, b_s - s\,\bar{\Omega}(b_{s|s} + b_{z|z}) = 0\,, \tag{19}$$

$$\dot{b}_z + \bar{\Omega}\, b_{z|\varphi} + \left(\frac{\bar{B}}{s} + \bar{B}_{|s}\right) v_s + \bar{B}\, v_{s|s} + \frac{\bar{B}}{s}\, v_{\varphi|\varphi} = 0\,, \tag{20}$$

$$\dot{\eta} + \bar{\Omega}\,\eta_{|\varphi} + \left(\frac{\bar{\varrho}}{s} + \bar{\varrho}_{|s}\right) v_s + \bar{\varrho}\left(v_{s|s} + \frac{1}{s}\, v_{\varphi|\varphi} + v_{z|z}\right) = 0\,, \tag{21}$$

$$b_{s|s} + \frac{1}{s}\, b_s + \frac{1}{s}\, b_{\varphi|\varphi} + b_{z|z} = 0\,, \tag{22}$$

$$\varepsilon_{|s|s} + \frac{1}{s}\,\varepsilon_{|s} + \frac{1}{s^2}\,\varepsilon_{|\varphi|\varphi} + \varepsilon_{|z|z} - 4\pi G\,\eta = 0\,. \tag{23}$$

Hierin bedeutet $\dot{} = \frac{\partial}{\partial t}$, $\quad {}_{|s} = \frac{\partial}{\partial s}$, $\quad {}_{|\varphi} = \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $\quad {}_{|z} = \frac{\partial}{\partial z}$,

und für die Schallgeschwindigkeit v_T wurde $\quad \frac{\partial}{\partial s} v_T^2 = 0\,,$ (24)

also Isothermie der ungestörten Verteilung angenommen.

2. Instabilitätskriterien und kritische Wellenlängen

Für einen einfachen Typ von Störungen, der ungefähr ebenen Wellen entspricht, gelingt es, Aussagen darüber zu gewinnen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit diese Störungen ständig weiter anwachsen können und wie groß die kritischen Wellenlängen sind.

a) Störungswelle in s-Richtung

Wir untersuchen zuerst das Verhalten einer in s-Richtung laufenden Störungswelle in der Umgebung der Entfernung s_0. Die Störung habe die Form

$$\left.\begin{array}{l} v_s \sim \frac{1}{s}\, e^{-i(ks-\omega t)}, \qquad \varepsilon_{|s} \sim \frac{1}{s}\, e^{-i(ks-\omega t)}, \qquad s_0 \neq 0 \\ \text{und alle anderen Störungsgrößen} \quad \sim e^{-i(ks-\omega t)}\,. \end{array}\right\} \tag{25}$$

k und ω sind Konstanten und die Störungswellenlänge λ ist durch $\lambda = 2\pi k^{-1}$ (26)

gegeben. Für alle Störungsgrößen gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} = i\omega\,, \quad \frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial}{\partial z} = 0\,. \tag{27}$$

Zusammen mit den Gln. (18), (22), (19), (17) folgt daraus $b_s = b_\varphi = v_z = 0\,.$ (28)

Die verbleibenden Differentialgleichungen können leicht gelöst werden unter der Annahme, alle dort auftretenden Koeffizienten seien konstant. Im allgemeinen ist dies natürlich nicht der Fall (auch nicht bei konstantem $\bar{\varrho}$, $\bar{\Omega}$, $\bar{B}$), aber je kleiner die Störungswellenlänge ist, desto besser wird diese Annahme zutreffen; genau müssen dazu die Bedingungen

$$\lambda \ll s_0\,, \quad \lambda\,\bar{\Omega}_{|s} \ll \bar{\Omega}\,, \quad \lambda\,\bar{\varrho}_{|s} \ll \bar{\varrho}\,, \quad \lambda\,\bar{B}_{|s} \ll \bar{B} \tag{29}$$

erfüllt sein, wo s_0 die Entfernung bedeutet, bei der die Störung untersucht wird. Im folgenden werden wir die differentielle Rotation berücksichtigen, die *Gradienten* in der Dichte und im Magnetfeld aber vernachlässigen. Für Probleme, bei denen die Gravitationskraft hauptsächlich durch eine differentielle Rotation kompensiert wird, stellt dies eine zulässige Näherung dar.

Es verbleibt dann ein Gleichungssystem, das unter Beachtung der Beziehungen

$$\begin{aligned} v_{s|s} + \frac{1}{s}\,v_s &= \frac{1}{s}\,(s\,v_s)_{|s} = -i\,k\,v_s \approx -\frac{i\,k}{s_0}\,e^{-i(ks-\omega t)}\,, \\ \varepsilon_{|s|s} + \frac{1}{s}\,\varepsilon_{|s} &= \frac{1}{s}\,(s\,\varepsilon_{|s})_{|s} = -i\,k\,\varepsilon_{|s} \approx -\frac{i\,k}{s_0}\,e^{-i(ks-\omega t)}\,, \end{aligned} \tag{30}$$

in Matrixform geschrieben die Gestalt hat:

$$\begin{vmatrix} i\omega & -2\bar{\Omega} & -\dfrac{i\,k\,\bar{B}}{4\pi\bar{\varrho}} & -\dfrac{i\,k\,v_T^2}{\bar{\varrho}} & 1 \\ 2\bar{\Omega}+s_0\bar{\Omega}_{|s} & i\omega & 0 & 0 & 0 \\ -i\,k\,\bar{B} & 0 & i\omega & 0 & 0 \\ -i\,k\,\bar{\varrho} & 0 & 0 & i\omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\pi G & -i\,k \end{vmatrix} \begin{vmatrix} v_s \\ v_\varphi \\ b_z \\ \eta \\ \varepsilon_{|s} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{31}$$

Gl. (31) hat nur dann eine nichttriviale Lösung, wenn die Determinante $D_{(s)}$ der linken Seite verschwindet. Es muß daher die Gleichung

$$D_{(s)} = i\,k\,\omega^2\left\{-\omega^2 + 2\,\bar{\Omega}(2\,\bar{\Omega} + s_0\,\bar{\Omega}_{|s}) - 4\pi G\,\bar{\varrho} + k^2(v_T^2 + v_B^2)\right\} = 0 \tag{32}$$

erfüllt sein, wo v_B die ALFVÉN-Geschwindigkeit mit

$$v_B^2 = \bar{B}^2/4\pi\bar{\varrho} \tag{33}$$

bedeutet. Echte Instabilität der Störung liegt vor, wenn $\omega^2 < 0$ und das bedeutet, wenn wir von jetzt ab an Stelle von s_0 einfach s schreiben,

$$k^2(v_T^2 + v_B^2) < 4\pi G\,\bar{\varrho} - 2\,\bar{\Omega}(2\,\bar{\Omega} + s\,\bar{\Omega}_{|s})\,. \tag{34}$$

Zusammen mit (26) folgt daraus als kritische Wellenlänge λ_s, die überschritten werden muß, damit Instabilität auftritt,

$$\lambda_s = \left\{\frac{\pi(v_T^2 + v_B^2)}{G\,\bar{\varrho} - \dfrac{\bar{\Omega}}{2\pi}\left(2\,\bar{\Omega} + s\,\dfrac{\partial\bar{\Omega}}{\partial s}\right)}\right\}^{1/2}. \tag{35}$$

Aus (35) geht hervor, daß es eine kritische Dichte ϱ_c gibt, die überschritten werden muß, wenn Gravitationsinstabilität auftreten soll. Sie hat den Wert

$$\varrho_c = \frac{\bar{\Omega}\left(2\,\bar{\Omega} + s\,\dfrac{\partial\bar{\Omega}}{\partial s}\right)}{2\pi G}\,, \tag{36}$$

ist also unabhängig von der magnetischen Feldstärke allein durch das Gesetz der differentiellen Rotation gegeben. Die kritische Wellenlänge dagegen ist vom Magnetfeld abhängig; sie wird in jedem Falle durch das Feld vergrößert.

Als Spezialfälle gehen aus (35) und (36) die von CHANDRASEKHAR und FERMI [2] ($\bar{\Omega} = 0$), von CHANDRASEKHAR [4] ($\bar{B} = 0$, $\bar{\Omega} = \text{const}$) und von BEL und SCHATZMAN [5] ($\bar{B} = 0$) gefundenen Instabilitätskriterien hervor.

Die kritische Dichte ϱ_c stellt eine verallgemeinerte ROCHE-Dichte dar, denn für KEPLER-Rotation des Gases $\overline{\Omega} = (G M)^{1/2} s^{-3/2}$ geht (36) über in

$$\varrho_c = \frac{M}{4 \pi s^3}. \tag{37}$$

Die kritische Dichte wird Null für die Fälle $\overline{\Omega} = 0$ und $\overline{\Omega} \sim s^{-2}$. Im zweiten Fall handelt es sich um eine Strömung, bei der $\operatorname{rot} \overline{\boldsymbol{v}} = 0$ ist. Die kritische Wellenlänge λ_s geht dabei in die JEANSsche Wellenlänge λ_J über, wenn noch das Magnetfeld verschwindet, also

$$\lambda_s = \lambda_J = \left(\frac{\pi v_T^2}{G \overline{\varrho}}\right)^{1/2} \quad \text{für } \overline{B} = 0 \text{ u. } \overline{\Omega} \sim \begin{cases} 0 \\ s^{-2}. \end{cases} \tag{38}$$

b) Störungswelle in φ-Richtung

Die Störung habe in der Umgebung der Entfernung s_0 die Form

$$v_s \sim \frac{1}{s} e^{-i(k\varphi - \omega t)}, \qquad s_0 \neq 0 \tag{39}$$

und alle anderen Störungsgrößen $\sim e^{-i(k\varphi - \omega t)}$.

Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial t} = i \omega, \qquad \frac{\partial}{\partial \varphi} = -i k, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

für alle Störungsgrößen, und ferner verschwinden die s-Ableitungen außer für v_s, für das $(s v_s)_{|s} = 0$ gilt.

Unter der Bedingung (29) und Vernachlässigung von $\overline{\varrho}_{|s}$ und $\overline{B}_{|s}$ ergibt sich nach Ausführung der Differentiationen ein Gleichungssystem, das zum Teil entkoppelt ist. Aus (18), (19), (22) folgt als Bedingung einer nichttrivialen Lösung für b_s und b_φ das gleichzeitige Erfülltsein der Gleichungen

$$\omega - k \overline{\Omega} = 0 \text{ und } \omega - k (s \overline{\Omega})_{|s} = 0, \tag{40}$$

was nur für $\overline{\Omega} = \text{const}$, also für starre Rotation erfüllt ist. In diesem Falle liegt aber keine echte Instabilität vor, weil $\omega^2 < 0$ nur für rein imaginäres k erfüllt wäre. Ebenso folgt aus (17), daß $\omega = k \overline{\Omega}$, wenn $v_z \not\equiv 0$ sein soll. Für die weitere Instabilitätsuntersuchung können wir daher

$$b_s = b_\varphi = v_z = 0 \tag{41}$$

setzen. Die verbleibenden Gleichungen lauten in Matrixform

$$\begin{vmatrix} i(\omega - k\overline{\Omega}) & -2\overline{\Omega} & 0 & 0 & 0 \\ 2\overline{\Omega} + s_0 \overline{\Omega}_{|s} & i(\omega - k\overline{\Omega}) & -\dfrac{i k \overline{B}}{4 \pi \overline{\varrho} s_0} & -\dfrac{i k v_T^2}{\overline{\varrho} s_0} & -\dfrac{i k}{s_0} \\ 0 & \dfrac{i k \overline{B}}{s_0} & i(\omega - k\overline{\Omega}) & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{i k \overline{\varrho}}{s_0} & 0 & i(\omega - k\overline{\Omega}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4\pi G & -\dfrac{k^2}{s_0^2} \end{vmatrix} \begin{matrix} v_s \\ v_\varphi \\ b_z \\ \eta \\ \varepsilon \end{matrix} = 0. \tag{42}$$

Die Forderung des Nullwerdens der Determinante $D_{(\varphi)}$ von (42) für die Existenz einer nichttrivialen Lösung führt hier auf die Gleichung

$$D_{(\varphi)} = \frac{k^2}{s_0^2} (\omega - k\overline{\Omega})^2 \left\{ -(\omega - k\overline{\Omega})^2 + \frac{k^2}{s_0^2} (v_T^2 + v_B^2) + 2\overline{\Omega}(2\overline{\Omega} + s_0 \overline{\Omega}_{|s}) - 4\pi G \overline{\varrho} \right\} = 0. \tag{43}$$

Gl. (43) hat als Lösungen, wenn wir von dem uninteressanten Fall $k = 0$ absehen, erstens

$$\omega = k \overline{\Omega}, \tag{44}$$

was einer Schwingung entspricht, die mit derselben Geschwindigkeit in φ-Richtung läuft wie das ungestörte Plasma, für einen mitbewegten Beobachter also zeitunabhängig ist; die zeitliche Änderung für einen mitbewegten Beobachter ist nämlich

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\bar{v}}{s} \frac{\partial}{\partial \varphi} = i(\omega - k\overline{\Omega}). \tag{45}$$

Und als zweite Lösung folgt

$$-(\omega - k\overline{\Omega})^2 - 4\pi G \overline{\varrho} + 2\overline{\Omega}(2\overline{\Omega} + s_0 \overline{\Omega}_{|s}) + \frac{k^2}{s_0^2} (v_T^2 + v_B^2) = 0. \tag{46}$$

Instabilität liegt unter Beachtung von (45) vor, wenn

$$(\omega - k\overline{\Omega})^2 < 0, \tag{47}$$

also wenn für einen mit $\bar{v}$ bewegten Beobachter die Störung ständig anwächst. Aus (46) und (47) er-

gibt sich die Instabilitätsbedingung

$$\frac{k^2}{s_0^2}(v_T^2+v_B^2)<4\pi G\bar{\varrho}-2\bar{\Omega}(2\bar{\Omega}+s_0\bar{\Omega}_{|s}). \quad (48)$$

Da wegen (39) für die Störungswellenlänge in φ-Richtung die Beziehung

$$\lambda=2\pi s_0 k^{-1} \quad (49)$$

gilt, ergibt sich aus (48) die gleiche minimale Störungswellenlänge λ_φ und die gleiche kritische Dichte ϱ_c wie im Fall der Störungswelle in s-Richtung, also

$$\lambda_\varphi=\lambda_s, \qquad \varrho_c=\frac{\bar{\Omega}(2\bar{\Omega}+s\bar{\Omega}_{|s})}{2\pi G}. \quad (50)$$

c) Störungswelle in z-Richtung

Als Störungswelle werde gewählt

$$v_s\sim\frac{1}{s}e^{-i(kz-\omega t)}, \qquad b_s\sim\frac{1}{s}e^{-i(kz-\omega t)}, \qquad s\neq 0,$$

alle anderen Störungsgrößen $\sim e^{-i(kz-\omega t)}$. (51)

Aus (20) und (22) folgt $b_z=0$, und die anderen Differentialgleichungen liefern, wieder unter Bedingung (29) und Vernachlässigung von $\bar{\varrho}_{|s}$ und $\bar{B}_{|s}$, das Gleichungssystem in Matrixform

$$\left|\begin{array}{cccc|ccc|c}
i\omega & -2\bar{\Omega} & \frac{ik\bar{B}}{4\pi\bar{\varrho}} & 0 & & & & v_s \\
2\bar{\Omega}+s\bar{\Omega}_{|s} & i\omega & 0 & \frac{ik\bar{B}}{4\pi\bar{\varrho}} & & 0 & & v_\varphi \\
ik\bar{B} & 0 & i\omega & 0 & & & & b_s \\
0 & ik\bar{B} & -s\bar{\Omega}_{|s} & i\omega & & & & b_\varphi \\
\hline
 & & & & -ik\bar{\varrho} & i\omega & 0 & v_z \\
 & 0 & & & i\omega & -\frac{ik v_T^2}{\bar{\varrho}} & -ik & \eta \\
 & & & & 0 & -4\pi G & -k^2 & \varepsilon
\end{array}\right| = 0. \quad (52)$$

Das System zerfällt also in zwei getrennte Systeme. Nullsetzen der Determinante $D_{(z)}$ von (52) ergibt

$$D_{(z)}=k^2(\omega^2-k^2v_T^2+4\pi G\bar{\varrho})\{\omega^4-2\omega^2[k^2v_B^2+\bar{\Omega}(2\bar{\Omega}+s\bar{\Omega}_{|s})]+k^2v_B^2(k^2+2s\bar{\Omega}\bar{\Omega}_{|s})\}=0, \quad (53)$$

was entweder für

$$\omega^2-k^2v_T^2+4\pi G\bar{\varrho}=0 \quad (54)$$

erfüllt ist oder für

$$\omega^4-2\omega^2[k^2v_B^2+\Omega(2\bar{\Omega}+s\bar{\Omega}_{|s})]+k^2v_B^2(k^2+2s\bar{\Omega}\bar{\Omega}_{|s})=0. \quad (55)$$

Instabilität liegt vor, wenn $\omega^2<0$, und das führt im ersten Fall auf die JEANSsche Wellenlänge λ_J als kritische Wellenlänge, also auf

$$\lambda_J=\left(\frac{\pi v_T^2}{G\bar{\varrho}}\right)^{1/2}, \quad (56)$$

wo v_T die Schallgeschwindigkeit ist. Dieser Störungstyp ist also unabhängig von der Größe des Magnetfeldes.

Im zweiten Fall ergibt sich eine andere Art von Instabilität, die nur mit dem Magnetfeld und der differentiellen Rotation zusammenhängt und zu keiner Verdichtung des Plasmas führt. Auf Grund des Zerfallens von (52) in zwei getrennte Systeme ergibt sich nämlich für die Größen v_z, η, ε Null, wenn (55) gilt. Auflösung von (55) nach ω^2 liefert nun

$$\omega^2=k^2v_B^2+\bar{\Omega}(2\bar{\Omega}+s\bar{\Omega}_{|s})\pm\bar{\Omega}\{4k^2v_B^2+(2\bar{\Omega}+s\bar{\Omega}_{|s})^2\}^{1/2}. \quad (57)$$

Die Bedingung $\omega^2<0$ bedeutet, daß entweder

$$k^2v_B^2<-s\bar{\Omega}\bar{\Omega}_{|s}-2\bar{\Omega}^2 \quad (58)$$

oder

$$k^2v_B^2<-2s\bar{\Omega}\bar{\Omega}_{|s} \quad (59)$$

sein muß. Da stets $s>0$ und k nicht rein imaginär sein darf, ist diese Bedingung nur für $\bar{\Omega}_{|s}<0$ zu erfüllen. (59) stellt dann die günstigere Bedingung dar, und als kritische Wellenlänge λ_z folgt

$$\lambda_z=\frac{\sqrt{2}\pi v_B}{\left(-s\bar{\Omega}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial s}\right)^{1/2}}=\frac{\sqrt{\pi}B}{\left(-2\bar{\varrho}s\bar{\Omega}\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial s}\right)^{1/2}} \quad (60)$$

mit $\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial s}<0$,

wo v_B die ALFVÉN-Geschwindigkeit (33) bedeutet. Für KEPLER-Rotation $[\bar{\Omega}=(GM)^{1/2}s^{-3/2}]$ ergibt sich

$$\lambda_z=\frac{\sqrt{\pi}Bs^{3/2}}{(3\bar{\varrho}GM)^{1/2}}. \quad (61)$$

Mit wachsender magnetischer Feldstärke nimmt die kritische Wellenlänge λ_z zu, während sie mit größer werdender Abweichung von der starren Rotation abnimmt. Bei starrer Rotation verschwindet die Instabilität ganz, weil dann $\lambda_z = \infty$. Wie (52) zeigt, ist bei diesem Instabilitätstyp $b_s \neq 0$ im Unterschied zu allen anderen Instabilitäten, bei denen stets $b_s = 0$ ist. Das Zustandekommen der kritischen Wellenlänge λ_z ist daher zu verstehen durch das Gegeneinanderwirken der differentiellen Rotation, die die magnetischen Feldlinien der Störung zu verlängern sucht, und derjenigen MAXWELLschen Spannungen, die dem entgegenwirken. Mit steigender Störungswellenlänge nehmen die rücktreibenden MAXWELLschen Spannungen ab, so daß von einer bestimmten Wellenlänge ab der differentiellen Rotation eine ständige Verlängerung der Feldlinien gelingt.

Wir betrachten noch den Grenzfall $\overline{B} = 0$. Aus (60) folgt $\lambda_z = 0$. Dies bedeutet aber nicht, daß hier notwendig Instabilität vorläge; mit $\lambda_z = 0$ wird nämlich auch $\omega = 0$. Gl. (55) oder (57) zeigt aber, daß es für $\overline{B} = 0$ (d. h. $v_B = 0$) noch eine zweite Lösung gibt, nämlich

$$\omega^2 = 2\,\overline{\Omega}(2\,\overline{\Omega} + s\,\overline{\Omega}_{|s}), \quad \overline{B} = 0\,. \tag{62}$$

In diesem Fall tritt Instabilität auf, wenn

$$\frac{\partial}{\partial s}\,(s^2\,\overline{\Omega}) < 0\,, \tag{63}$$

ganz unabhängig von k. Bedingung (63) ist erfüllt, wenn das Geschwindigkeitsfeld bei wachsendem s mit einer stärkeren Potenz in s abnimmt als eine Strömung mit $\operatorname{rot}\overline{\boldsymbol{v}} = 0$.

3. Zusammenfassung

Die Untersuchung hat folgendes gezeigt: Ein axialsymmetrisches Plasma mit unendlicher elektrischer Leitfähigkeit, das sich in differentieller Rotation um die Symmetrieachse befindet, das von einem Magnetfeld in Richtung der Symmetrieachse durchsetzt wird und in dem das Geschwindigkeitsfeld allein die Eigengravitation kompensiert, zeigt gegen eine zylindrische Störungswelle in s-Richtung nur dann Instabilität, wenn die Massendichte des Plasmas eine bestimmte kritische Dichte ϱ_c [Gl. (36)] überschritten hat. Diese kritische Dichte ist unabhängig von der Wellenlänge der Störung und von der Stärke des Magnetfeldes allein durch die differentielle Rotation bestimmt. Ist die kritische Dichte überschritten, so tritt Instabilität nur auf, wenn die Störungswellenlänge größer als eine kritische Wellenlänge λ_s [Gl. (35)] ist. Mit wachsender Temperatur und wachsender Stärke des Magnetfeldes wächst die kritische Wellenlänge. Gegenüber einer ebenfrontigen Störungswelle in φ-Richtung zeigt das Plasma das gleiche Verhalten wie im Fall der Störungswelle in s-Richtung. Kritische Dichte und kritische Wellenlänge stimmen überein.

Bei einer ebenfrontigen Störungswelle in Richtung der Rotationsachse ergeben sich zwei verschiedene Instabilitätstypen. Der eine ist unabhängig vom Magnetfeld und von der differentiellen Rotation und führt auf das JEANSsche Instabilitätskriterium. Hier liegt also keine kritische Dichte vor. Der zweite hängt allein vom Magnetfeld und der differentiellen Rotation ab, führt aber nicht zu Dichteänderungen des Plasmas. Er kann nur auftreten, wenn die Rotationsgeschwindigkeit schwächer anwächst als bei starrer Rotation und wenn die Störungswellenlänge eine kritische Länge λ_z [Gl. (60)], die proportional zur Stärke des Magnetfeldes ist, überschritten hat.